DEVOIR MAISON

à rendre pour le 14 mars

Exercice 1 (Homéomorphismes entre compacts épointés)

Soient X et Y deux espaces topologiques *compacts*, soit $x \in X$, soit $y \in Y$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme

$$f\colon X \setminus \{x\} \xrightarrow{\sim} Y \setminus \{y\}.$$

Montrer que X est homéomorphe à Y.

Exercice 2 (Quelques propriétés des groupes topologiques)

Un groupe topologique est un groupe muni d'une topologie rendant continues les lois de groupe $(g, g') \in G \times G \mapsto gg' \in G$ et $g \in G \mapsto g^{-1}$.

a) Montrer qu'un sous-groupe ouvert d'un groupe topologique est fermé.

b) Soit G un groupe topologique *connexe*. Soit V un voisinage de l'élément neutre. Montrer que G est égal au sous-groupe engendré par V.

c) Soit G un groupe topologique. Montrer que la composante connexe G° de l'élément neutre est un sous-groupe distingué fermé de G.

d) Montrer que tout sous-groupe discret et distingué d'un groupe topologique *connexe* G est contenu dans le centre de G.

e) On appelle *espace homogène* tout espace muni d'une action transitive d'un groupe G, autrement dit tout espace isomorphe à un quotient G/H de G par un sous-groupe H.

Soit $H \subset G$ un sous-groupe d'un groupe topologique G. Montrer que l'espace quotient G/H est séparé si et seulement si H est fermé, et qu'il est discret si et seulement si H est ouvert.

f) Soit G un groupe topologique *compact* opérant continûment et *transitivement* sur un espace séparé X. Montrer que, pour tout $x \in X$, l'application $g \in G \longmapsto gx \in X$ induit un homéomorphisme

$$G/G_x \xrightarrow{\sim} X$$

où G_x désigne le stabilisateur de x.

g) (Application) Soient $\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$ le groupe orthogonal des matrices orthogonales de taille n, et $\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ le groupe spécial orthogonal, noyau du morphisme $\det\colon \mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \to \{\pm 1\}$. Montrer que, pour $n \geqslant 1$, il existe des homéomorphismes entre « les » espaces homogènes $\mathbf{O}_{n+1}(\mathbf{R})/\mathbf{O}_n(\mathbf{R})$, $\mathbf{SO}_{n+1}(\mathbf{R})/\mathbf{SO}_n(\mathbf{R})$ et la sphère $\mathbf{S}^n$ (en levant l'ambiguïté sur l'inclusion $\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \subset \mathbf{O}_{n+1}(\mathbf{R})$ considérée) :

$$\mathbf{O}_{n+1}(\mathbf{R})/\mathbf{O}_n(\mathbf{R}) \simeq \mathbf{S}^n \simeq \mathbf{SO}_{n+1}(\mathbf{R})/\mathbf{SO}_n(\mathbf{R}).$$

Problème (Théorème de Tychonov via propreté)

Le but du problème est d'établir le théorème de Tychonov.

Théorème. *Un produit d'espaces quasi-compacts est quasi-compact.*

Il existe de très nombreuses démonstrations de ce théorème. Nous proposons ici une démonstration adaptée d'une démonstration originale, récente (et locale !) due à E. Matheron [1], elle-même inspirée d'un argument de nature catégorique [2]. Cette démonstration s'appuie sur une caractérisation des espaces quasi-compacts en termes d'applications fermées.

On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ d'un espace topologique X dans un espace topologique Y est une *application propre* si f est continue et si, pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ est fermée [3].

a) Montrer que la composée de deux applications propres est une application propre.

b) Soit X un espace topologique tel que l'application constante $X \longrightarrow \{*\}$ est propre (on note $\{*\}$ l'espace topologique réduit à un point, muni de son unique topologie). On souhaite montrer que X est alors quasi-compact.

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés tels que $\bigcap\limits_{j\in J} F_j \neq \emptyset$ pour tout $J \subset I$ fini.

(i) Soit X' l'ensemble $X' = X \sqcup \{\omega\}$ obtenu en adjoignant à X un point $\omega \notin X$. Montrer qu'on peut munir X' d'une topologie dans laquelle les ouverts sont toutes les parties de X et les parties $\{\omega\} \cup M$ où $M \subset X$ contient une intersection $\bigcap\limits_{j\in J} F_j$ avec $J \subset I$ fini.

(ii) Montrer que X est dense dans X'.

(iii) Montrer que l'adhérence $\Gamma = \overline{\Delta}$ de $\Delta = \{(x, x) \in X \times X' \mid x \in X\}$ rencontre $X \times \{\omega\}$.

(iv) En déduire que $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est non vide, et conclure.

On a montré dans le cours que $X \longrightarrow \{*\}$ est propre si X est quasi-compact. On a donc :

Théorème. *Un espace topologique est quasi-compact si et seulement si l'application $X \longrightarrow \{*\}$ est propre.*

c) En déduire que le produit de deux quasi-compacts est quasi-compact.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour tout $J \subset I$, on note $X_J = \prod\limits_{j\in J} X_j$, et, si J non vide, $p_J\colon X_I \longrightarrow X_J$ la projection de $X_I = \prod\limits_{i\in I} X_i$ sur $X_J = \prod\limits_{j\in J} X_j$. En particulier, $X_{\{j\}} = X_j$, $p_{\{j\}}$ est la projection $p_j\colon X_I \longrightarrow X_j$, et $X_\emptyset = \prod\limits_{i\in\emptyset} X_i$ est le singleton $\{\emptyset\}$.

---

1. Étienne Matheron, *Three Proofs of Tychonoff's Theorem*, The American Mathematical Monthly, **127** (2020), Issue 5, 437-443.

2. M. M. Clementino and W. Tholen, *Tychonoff's theorem in a category*, Proc. Amer. Math. Soc., **124** (1996), Number 11, 3311-3314.

3. On dit qu'une application $f\colon X \to Y$ entre espaces topologiques est *universellement fermée* si, pour tout espace topologique Z, l'application $f \times \mathrm{id}_Z\colon X \times Z \to Y \times Z$ est fermée. Ainsi, une application propre est une application continue universellement fermée. Certains auteurs appellent propre une application universellement fermée, non nécessairement continue.

d) Soient $A \subset \prod_{i\in I} X_i$ et $x \in \prod_{i\in I} X_i$. Montrer que $x \in \overline{A}$ si et seulement si $p_F(x) \in \overline{p_F(A)}$ pour tout sous-ensemble *fini* $F \subset I$. Autrement dit $\overline{A} = \bigcap_{F\subset I \text{ fini}} {p_F}^{-1}(\overline{p_F(A)})$.

Plus généralement montrer que, si $F_0 \subset I$ est une partie finie fixée de I, $x \in \overline{A}$ si et seulement si $p_F(x) \in \overline{p_F(A)}$ pour toute partie finie $F \subset I$ contenant F_0.

Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques *quasi-compacts*. Soit Y un espace topologique, et soit $q\colon X_I \times Y = (\prod_{i\in I} X_i) \times Y \longrightarrow Y$ la projection naturelle. Notons, pour tous $J' \subset J \subset I$,

$$q^J_{J'}\colon X_J \times Y \longrightarrow X_{J'} \times Y$$

la projection naturelle de $X_J \times Y$ sur $X_{J'} \times Y$. Alors $q^I_\emptyset$ est la projection $q\colon X_I \times Y \to Y$. On notera $q_J\colon X_I \times Y \to X_J \times Y$ les projections q^I_J.

e) Soit Γ une partie fermée de $X_I \times Y$. Nous souhaitons montrer que $q(\Gamma)$ est fermé dans Y. Soit $y \in \overline{q(\Gamma)}$. On considère l'ensemble $\mathcal{S}$ des couples (J, x_J) tels que $J \subset I$, $x_J \in X_J$ et $(x_J, y) \in \overline{q_J(\Gamma)}$.

(i) Montrer qu'il suffit de montrer qu'il existe $x_I \in X_I$ tel que $(I, x_I) \in \mathcal{S}$.

On munit $\mathcal{S}$ de l'ordre défini par

$$(J, x_J) \leqslant (J', x_{J'}) \iff J \subset J' \quad \text{et} \quad q^{J'}_J(x_{J'}, y) = (x_J, y).$$

(ii) Montrons que l'ensemble ordonné $(\mathcal{S}, \leqslant)$ est un ensemble inductif[4]. Soit $\{(J_\alpha, x_{J_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ un sous-ensemble totalement ordonné de $\mathcal{S}$. Soit $J = \bigcup_{\alpha\in A} J_\alpha$.

(1) Construire un élément $x_J \in X_J$ tel que $q^J_{J_\alpha}(x_J, y) = (x_{J_\alpha}, y)$ pour tout $\alpha \in A$.

(2) Montrer que $(x_J, y) \in \overline{q_J(\Gamma)}$.

(3) En déduire que $\{(J_\alpha, x_{J_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ est une partie majorée.

(iii) Justifier l'existence d'un élément (J_0, x_{J_0}) maximal dans $\mathcal{S}$, et montrer que $J_0 = I$.

(iv) Conclure.

f) En conclure que le produit $\prod_{i\in I} X_i$ est quasi-compact.

4. Un ensemble ordonné est *inductif* si tout sous-ensemble totalement ordonné admet un majorant.