DEVOIR SURVEILLÉ – I

Vendredi 10 mars 2023

[Durée : 2 heures]

Le barème est donné à titre indicatif.

Exercice 1 (*5 points*) **Échauffement**

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

a) Soit $\mathbf{U} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle unité dans $\mathbf{C}$, et soit $\sigma\colon z \in \mathbf{U} \mapsto \overline{z} \in \mathbf{U}$ la conjugaison complexe. On note $\langle\sigma\rangle$ le sous-groupe (à deux éléments) de $\operatorname{Aut}\mathbf{U}$ engendré par σ. Montrer que $\mathbf{U}/\langle\sigma\rangle$ est homéomorphe au segment $[0, 1]$.

b) Soit $\mathbf{T} = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ le tore à deux dimensions, et soit $p\colon x \in \mathbf{R}^2 \mapsto [x] \in \mathbf{T}$ la projection canonique. Soit $L \subset \mathbf{R}^2$ une droite vectorielle. Montrer que son image $p(L)$ est ou bien compacte, ou bien dense dans $\mathbf{T}$.

Exercice 2 (*7 points*) **Demi-plan de Poincaré**

On appelle *demi-plan de Poincaré* l'espace

$$\mathcal{H} = \{z \in \mathbf{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{C}$. On considère le groupe spécial linéaire

$$\mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) = \{M \in \mathbf{M}_2(\mathbf{R}) \mid \det(M) = 1\},$$

muni de la topologie induite par celle de $\mathbf{M}_2(\mathbf{R})$, et l'espace topologique quotient $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})/\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$ des classes à gauche modulo le sous-groupe

$$\mathbf{SO}_2(\mathbf{R}) = \{g \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \mid {}^tgg = I_2\}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\mathcal{H}$ est homéomorphe à $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})/\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$.

a) Montrer que le groupe $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$ agit continûment sur $\mathcal{H}$ via

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z\right) \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \times \mathcal{H} \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}.$$

b) Montrer que l'orbite de i est $\mathcal{H}$. Plus précisément, montrer que $g \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \mapsto g \cdot i$ admet une section continue s.

c) Montrer que le stabilisateur de i est $\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$.

d) Montrer que $\mathcal{H}$ est homéomorphe à $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})/\mathbf{SO}_2(\mathbf{R})$.

e) Montrer que, pour tout compact $K \subset \mathcal{H}$, $\{g \in \mathbf{SL}_2(\mathbf{R}) \mid g \cdot i \in K\}$ est compact dans $\mathbf{SL}_2(\mathbf{R})$.

f) On fait agir $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z}) = \{M \in \mathbf{M}_2(\mathbf{Z}) \mid \det(M) = 1\}$ sur $\mathcal{H}$, encore par $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ agit proprement sur $\mathcal{H}$.

Exercice 3 (*11 points*) **Sur la contractilité des sphères**

Soit $n \geqslant 1$. On note $\mathbf{B}^{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de l'espace euclidien $(\mathbf{R}^{n+1}, \|.\|)$, et $\mathbf{S}^n = \partial \mathbf{B}^{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ la sphère de dimension n.

On rappelle qu'un espace X non vide est *contractile* si l'application $\mathrm{id}_X \colon X \to X$ est homotope à une application constante.

a) Montrer que s'il existait une fonction continue $f \colon \mathbf{B}^{n+1} \longrightarrow \mathbf{B}^{n+1}$ sans point fixe, alors la sphère $\mathbf{S}^n$ serait contractile.

Indication : introduire les applications

$$H_1 \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^n \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{S}^n \\ (x,t) & \longmapsto & r(x - tf(x)) \end{array} \quad \text{et} \quad H_2 \colon \begin{array}{ccc} \mathbf{S}^n \times [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{S}^n \\ (x,t) & \longmapsto & r(tx - f(tx)) \end{array}$$

où r est l'application $x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longmapsto \dfrac{x}{\|x\|} \in \mathbf{S}^n$.

b) Montrer que, si $H \colon \mathbf{S}^n \times [0,1] \to \mathbf{S}^n$ est une homotopie de $\mathrm{id}_{\mathbf{S}^n}$ à une application constante $x \in \mathbf{S}^n \mapsto x_0 \in \mathbf{S}^n$, alors l'application

$$x \in \mathbf{B}^{n+1} \longmapsto \begin{cases} H\left(\frac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right) & \text{si } \|x\| \geqslant \frac{1}{2} \\ x_0 & \text{si } \|x\| \leqslant \frac{1}{2} \end{cases}$$

est une rétraction continue de $\mathbf{B}^{n+1}$ sur $\mathbf{S}^n$.

c) Montrer qu'une rétraction continue $r \colon \mathbf{B}^{n+1} \to \mathbf{S}^n$ de l'inclusion $\mathbf{S}^n \hookrightarrow \mathbf{B}^{n+1}$ permet de définir une application continue $\mathbf{B}^{n+1} \to \mathbf{B}^{n+1}$ sans point fixe.

d) Déduire des questions précédentes que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $\mathbf{S}^n$ n'est pas contractile,

(ii) toute application continue $\mathbf{B}^{n+1} \to \mathbf{B}^{n+1}$ admet un point fixe (*théorème de Brouwer*),

(iii) il n'existe pas de rétraction de $\mathbf{B}^{n+1}$ sur $\mathbf{S}^n$.

On admet que les trois propriétés équivalentes considérées dans la question précédente sont vraies.

e) (*Application du théorème de Brouwer en dimension* 2)

On souhaite montrer que deux chemins tracés dans un rectangle du plan $\mathbf{R}^2$ joignant chacun une paire différente de côtés opposés se croisent nécessairement. Soit $R = [a,b] \times [c,d]$ un rectangle du plan (avec $a < b$ et $c < d$ réels), et soient γ, δ deux applications continues $[-1,1] \to R$ telles que γ relie les deux côtés verticaux et δ les deux côtés horizontaux, c'est-à-dire, en notant $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ et $\delta = (\delta_1, \delta_2)$:

$$\gamma_1(-1) = a, \quad \gamma_1(1) = b, \quad \delta_2(-1) = c, \quad \delta_2(1) = d.$$

Supposons que, pour tout $s, t \in [-1,1]$, $\gamma(s) \neq \delta(t)$. Soit $K = [-1,1] \times [-1,1]$. C'est le disque unité fermé pour la norme définie par $\|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$. Soit f l'application définie sur K par

$$(s,t) \in K \quad \stackrel{f}{\longmapsto} \quad \left(\frac{-\gamma_1(s) + \delta_1(t)}{\|\gamma(s) - \delta(t)\|_\infty}, \frac{-\delta_2(t) + \gamma_2(s)}{\|\gamma(s) - \delta(t)\|_\infty} \right).$$

(i) Montrer que $f(K) \subset K$.

(ii) Montrer qu'il existe $(s_0, t_0) \in K$ tel que $f(s_0, t_0) = (s_0, t_0)$.

(iii) Montrer que $s_0 \in \{\pm 1\}$ ou $t_0 \in \{\pm 1\}$.

(iv) Montrer que chacun de ces quatre cas aboutit à une contradiction.

Il existe ainsi $(s,t) \in [-1,1] \times [-1,1]$ tels que $\gamma(s) = \delta(t)$: les deux chemins se croisent donc en $\gamma(s) = \delta(t) \in R$.

f) (*Contractilité de la sphère unité dans un espace de Hilbert de dimenion infinie*)
Considérons l'espace de Hilbert $L^2([0,1])$, et notons S^∞ sa sphère unité

$$S^\infty = \left\{ f \in L^2([0,1]) \mid \int_0^1 |f(x)|^2 dx = 1 \right\}.$$

Montrer que S^∞ est contractile.

Indication : considérer, pour $f \in S^\infty$ et $t \in [0,1]$, les fonctions $f^{[t]} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant t, \\ f(\frac{x}{t}) & \text{si } x < t. \end{cases}$