Université de Lille

2022/23 - Master 1 - Topologie algébrique

Devoir Surveillé 2

Exercice 1. (Vrai ou faux)
Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses.
Justifier la réponse par une courte preuve ou un contre-exemple.
a. Il existe deux applications continues d'un même espace vers $\mathbb{R}^2$ qui ne sont pas homotopes.
b. Il existe deux applications continues d'un même espace vers $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ qui ne sont pas homotopes.
c. Tout ensemble muni de la topologie discrète est simplement connexe.
d. Toute application continue injective induit une morphisme injectif entre les groupes fondamentaux.

Exercice 2. (Logarithme complexe)
Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas d'application continue $\log\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ telle que

$$\log(1) = 0 \quad \text{et} \quad \exp(\log(z)) = z \ \text{ pour tout } z \in \mathbb{C}^*,$$

où exp est l'exponentielle complexe. Pour cela, on suppose qu'une telle application log existe.
a. Determiner $\pi_1(\mathbb{C}, 0)$.
b. Montrer que S^1 est un rétract par déformation de $\mathbb{C}^*$. En déduire $\pi_1(\mathbb{C}^*, 1)$.
c. Déterminer les morphismes de groupes $\exp_*$ et $\log_*$ induits en homotopie.
d. Conclure.

Exercice 3. (Calcul d'un groupe fondamental)
On rappelle que le groupe fondamental du plan euclidien privé de deux points distincts est un groupe libre de rang 2 : $\pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0),(-1,0)\},(0,0)) \simeq \mathbb{F}(2)$. Par invariance par homéomorphisme, on en déduit que, pour tout disque ouvert D de centre $(0,0)$ et de rayon $r > 1$,

$$\pi_1(D \setminus \{(1,0),(-1,0)\},(0,0)) \simeq \mathbb{F}(2).$$

On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, de coordonnées x, y et z. On considère les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ du plan d'équation $x = 0$ ayant pour équations respectives $y = 1$ et $y = -1$, et le cercle C du plan $z = 0$ de centre $O = (0,0,0)$ et de rayon 3.
On pose $X = \mathbb{R}^3 \setminus (\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup C)$ et $P = (2,0,0)$. On se propose de calculer $\pi_1(X, P)$.
a. Faire un dessin.
b. Soit $U = X \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 9\}$. Montrer que $\pi_1(U, P)$ est un groupe libre de rang 2, et exhiber deux lacets α, β dont les classes forment une base de ce groupe libre (*une représentation graphique de tels lacets pourra remplacer ou accompagner des expressions analytiques*).
c. Soit $V = X \cap \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 1\}$. Montrer que $\pi_1(V, P)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}^2$, et exhiber deux lacets γ, δ dont les classes engendrent ce groupe (*une représentation graphique de tels lacets pourra remplacer ou accompagner des expressions analytiques*).
d. Montrer que $\pi_1(U \cap V, P)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et exhiber un lacet dont la classe engendre ce groupe (*une représentation graphique d'un tel lacet pourra remplacer ou accompagner une expression analytique*).
e. En utilisant le théorème de Van Kampen, montrer que $\pi_1(X, P)$ est un quotient du groupe libre $\mathbb{F}(a,b,c)$ à trois générateurs a, b, c par une relation qu'on précisera.

Problème

Partie I. (Revêtements d'un groupe topologique)
Soit $p\colon E \to G$ un revêtement, où E est un espace topologique et G est un groupe topologique. On suppose que E et G sont connexes et localement connexes par arcs. On note le produit de G par $*$ et son élément neutre par 1. Soit $e \in p^{-1}(1)$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe sur E une unique structure de groupe topologique admettant e pour élément neutre et telle que p soit un homomorphisme de groupes topologiques (c'est-à-dire un homomorphisme de groupes qui est continu).

a. Soient α et β sont deux lacets de G basés en 1. Notons par $\alpha * \beta$ et $\hat{\alpha}$ les lacets de G définis par $(\alpha * \beta)(s) = \alpha(s) * \beta(s)$ et $\hat{\alpha}(s) = \alpha(s)^{-1}$ pour $s \in [0, 1]$. Montrer que dans $\pi_1(G, 1)$ on a :

$$[\alpha][\beta] = [\alpha * \beta] \quad \text{et} \quad [\alpha]^{-1} = [\hat{\alpha}].$$

Indication : montrer que $\alpha * \beta$ est homotope (à extrémités fixes) à la composition usuelle $\alpha \cdot \beta$ des lacets α et β. Pour cela, on pourra considérer l'application $H\colon [0, 1] \times [0, 1] \to G$, définie par $H(s, t) = A(s, t) * B(s, t)$, où A et B sont des homotopies (à extrémités fixes) de α à $\alpha \cdot c$ et de β à $c \cdot \beta$, respectivement, c désignant le lacet de G constant égal à 1.

b. Soit $m\colon E \times E \to G$ l'application définie $m(x, y) = p(x) * p(y)$.
Montrer que $m_*(\pi_1(E \times E, (e, e))) \subset p_*(\pi_1(E, e))$. En déduire qu'il existe une unique application continue $\tilde{m}\colon E \times E \to E$ telle que $\tilde{m}(e, e) = e$ et $p \circ \tilde{m} = m$.

c. Soit $\iota\colon E \to G$ l'application définie $\iota(x) = p(x)^{-1}$.
Montrer qu'il existe une unique application continue $\tilde{\iota}\colon E \to E$ telle que $\tilde{\iota}(e) = e$ et $p \circ \tilde{\iota} = \iota$.

d. Montrer que pour tous $x, y, z \in E$,

$$\tilde{m}(\tilde{m}(x, y), z) = \tilde{m}(x, \tilde{m}(y, z)) \quad \text{et} \quad \tilde{m}(\tilde{\iota}(x), x) = e = \tilde{m}(x, \tilde{\iota}(x)).$$

e. Conclure.

Partie II. (Structure de groupe topologique sur S^3)
Le but de cette partie est de montrer que la sphère

$$S^3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1\}$$

admet une structure de groupe topologique non commutatif. Pour cela, on considère les espaces topologiques

$$B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leq 1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) = \{M \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}) \,\big|\, {}^tMM = \mathrm{I}_3 \text{ et } \det(M) = 1\},$$

ainsi que le groupe multiplicatif $\mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}$.

a. Montrer que l'application quotient $p\colon S^3 \to S^3/\mathbb{Z}_2$ est un revêtement, où $\mathbb{Z}_2$ agit par multiplication scalaire sur S^3.

b. Soit $\sim$ la relation d'équivalence sur B^3 définie par $x \sim y$ si $x = y$ ou ($x \in S^2$ et $y = -x$).
Montrer que $S^3/\mathbb{Z}_2 \cong B^3/\sim$.
Indication : considérer l'application $p \circ f\colon B^3 \to S^3/\mathbb{Z}_2$, où $f\colon B^3 \to S^3$ est définie par

$$f(x) = (x_1, x_2, x_3, \sqrt{1 - \|x\|^2}) \quad \text{pour} \quad x = (x_1, x_2, x_3) \quad \text{avec} \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}.$$

c. Montrer que $B^3/\sim \,\cong \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.
Indication : considérer l'application $h\colon B^3 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ définie par : $h(0) = \mathrm{I}_3$ et, pour $x \in B^3 \setminus \{0\}$, $h(x)$ est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la rotation de vecteur directeur x et d'angle $\pi\|x\|$.

d. En déduire un revêtement $S^3 \to \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ et conclure (au moyen de la partie I).