TD1 - Topologie générale : notions de base

Exercice 1.
Soit X un ensemble. Vérifier que l'ensemble vide et les complémentaires des parties finies de X forment une topologie sur X, appelée *topologie cofinie*.

Exercice 2.
Vérifier que $\{[0,1]\} \cup \{[0,x[\mid x \in [0,1]\}$ définit une topologie sur l'intervalle $[0,1]$.

Exercice 3. (Topologie engendrée)
Soient X un ensemble et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de X.

a. Montrer qu'il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) topologie sur X contenant $\mathcal{B}$, appelée la *topologie engendrée par* $\mathcal{B}$.

b. Montrer qu'une partie de X est ouverte pour la topologie engendrée par $\mathcal{B}$ si et seulement si elle est une union (quelconque) d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$ (en convenant ici que l'intersection indexée par l'ensemble vide est X).

c. Soient X, Y deux espaces topologiques et $\mathcal{B}$ un ensemble de parties de Y qui engendre la topologie de Y. Montrer qu'une application $f\colon X \to Y$ est continue si et seulement si $f^{-1}(B)$ est un ouvert de X pour tout $B \in \mathcal{B}$.

Exercice 4. (Espaces métriques)
L'ensemble des boules ouvertes d'espace métrique (X,d) engendre une topologie sur X appelée *topologie définie par la distance* d. Montrer qu'une partie de X est ouverte pour cette topologie si et seulement si elle est une union de boules ouvertes.

Exercice 5. (Topologie produit)
Soient X et Y deux espaces topologiques. On munit $X \times Y$ de la *topologie produit*, c'est-à-dire de la topologie engendrée par la famille des *pavés ouverts* $\mathcal{B} = \{U \times V \mid U \text{ ouvert de } X, V \text{ ouvert de } Y\}$.

a. Rappelons qu'une application $f\colon Z \to X \times Y$, où Z est un espace topologique, est continue si et seulement si les deux applications $p_1 \circ f\colon Z \to X$ et $p_2 \circ f\colon Z \to Y$ sont continues, où $p_1\colon X \times Y \to X$ et $p_2\colon X \times Y \to Y$ sont les projections. Montrer que si $f_1\colon X_1 \to Y_1$ et $f_2\colon X_2 \to Y_2$ sont continues, alors l'application $f_1 \times f_2\colon X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$, définie par $(f_1 \times f_2)(x_1,x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$, est continue.

b. Il est faux de conjecturer qu'une application $f\colon X \times Y \to Z$ est continue si elle est continue en chaque variable séparément. En effet, vérifier que si f est continue alors pour tous $a \in X$ et $b \in Y$, les *applications partielles* $f_a\colon Y \to Z$ et $f^b\colon X \to Z$, définies par $f_a(y) = f(a,y)$ et $f^b(x) = f(x,b)$, sont continues, mais que la réciproque est fausse. [*Indication:* on pourra considérer l'application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0,0) = 0$ et $f(x,y) = xy/(x^2+y^2)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.]

Exercice 6. (Topologie induite)

a. Soient X un espace topologique, ayant $\mathcal{T}$ pour topologie, et A est une partie de X. Verifier que

$$\mathcal{T}_A = \{U \cap A \mid U \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur A, appelée *topologie induite* sur A par X. Un *sous-espace topologique* de X est une partie de X munie de la topologie induite par X.

b. Soient X, Y des espaces topologiques, A un sous-espace topologique de X et B un sous-espace topologique de Y. Montrer que la topologie produit sur $A \times B$ coïncide avec la topologie induite sur $A \times B$ par $X \times Y$.

c. Soit (X,d) un espace métrique. On munit X de la topologie définie par d. Montrer que sur toute partie de X, la topologie induite coïncide avec celle définie par la restriction de la distance.

Exercice 7. (Boucle d'oreille hawaïenne)
La *boucle d'oreille hawaïenne* est l'union $C = \cup_{n\geq 1} C_n$ des cercles C_n de centre $(1/n, 0)$ et de rayon $1/n$. On munit C de la topologie induite par $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application $f\colon C \to C$, définie par $f(x, y) = (nx, ny)$ pour $(x, y) \in C_n$, n'est pas continue.

Exercice 8. (Projection stéréographique)
Soit $N = (0, \ldots, 0, 1)$ le pôle nord de la sphère $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \,\big|\, x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$.
La *projection stéréographique de pôle N* est l'application

$$p\colon S^n\backslash\{N\} \to \mathbb{R}^n$$

qui associe à tout $x \in S^n\backslash\{N\}$ l'unique point $p(x)$ de $\mathbb{R}^n$ tel que les points N, x, et $(p(x), 0)$ soient alignés dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

a. Calculer $p(x)$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n\backslash\{N\}$.
On fera un dessin illustrant la situation pour $n = 1$ et $n = 2$.

b. Montrer que p est un homéomorphisme.

Exercice 9.
Montrer que les homéomorphismes $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont les bijections monotones de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. (Espaces topologiques séparés)
Un espace topologique est *séparé* si deux points distincts de l'espace admettent toujours des voisinages ouverts disjoints.

a. Montrer que tout singleton d'un espace séparé est fermé.

a. Montrer qu'un espace topologique X est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

b. Soit $f\colon X \to Y$ une application continue avec Y séparé. Montrer que le *graphe* de f, défini comme l'ensemble $\Delta_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$, est un fermé de $X \times Y$.

Exercice 11. (Topologie de Zariski)
Soit $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ l'anneau des polynômes à n variables. A tout idéal I de $\mathcal{P}$, on associe l'ensemble

$$Z(I) = \{\, (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n \mid P(a_1, \ldots, a_n) = 0 \text{ pour tout } P \in I \,\}.$$

a. Montrer que les ensembles $Z(I)$ définissent l'ensemble des fermés d'une topologie sur $\mathbb{C}^n$, appelée *topologie de Zariski*.

b. Vérifier que pour $n = 1$, la topologie de Zariski coïncide avec la topologie cofinie (voir l'exercice 1).

c. Observer que la topologie de Zariski n'est pas séparée : deux ouverts non-vides se rencontrent obligatoirement.

Exercice 12. (Normalité des espaces compacts)
Un espace topologique est *normal* (ou *T4*) si deux fermés disjoints sont séparés par deux ouverts disjoints. Montrez qu'un espace topologique compact est normal.

Exercice 13. (Compactification d'Alexandroff)
Soit X un espace topologique. Notons $X^+ = X \cup \{\infty\}$ où $\infty \notin X$.

a. Soit $\mathcal{T}$ la famille constituée des ouverts de X et des ensembles de la forme $(X \setminus K) \cup \{\infty\}$ pour K un quasi-compact fermé de X. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X^+.

b. Montrer que X^+ (muni de la topologie $\mathcal{T}$) un espace quasi-compact, et que l'inclusion $X \hookrightarrow X^+ \setminus \{\infty\}$ est un homéomorphisme. On appelle l'espace X^+ le *compactifié d'Alexandroff de X*.

c. Montrez que si K est compact, alors $(K \setminus \{x\})^+$ est homéomorphe à K pour tout $x \in K$. En déduire que $(\mathbb{R}^n)^+$ est homéomorphe à S^n.

d. Un espace *localement compact* est un espace topologique séparé qui admet des voisinages compacts pour tous ses points. Montrez que X^+ est compact si et seulement si X est localement compact.

Exercice 14. (Connexité)
Un espace topologique est *connexe* s'il ne peut pas s'écrire comme union de deux ouverts non vides disjoints.

a. Une partie C d'un espace topologique est *connexe* si C munie de la topologie induite est un espace topologique connexe. Montrer qu'une partie C d'un espace topologique X est connexe si et seulement si pour tous ouverts U, V de X tels que $U \cap V \cap C = \emptyset$ et $C \subseteq U \cup V$, on a : $C \subseteq U$ ou $C \subseteq V$.
b. Montrer que l'image d'une partie connexe par une application continue est connexe.
c. Montrer que l'union de parties connexes ayant un point en commun est connexe.
d. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes est connexe.
e. Montrer que si C est une partie connexe d'un espace topologique X, alors toute partie A de X telle que $C \subseteq A \subseteq \overline{C}$ est connexe.

Exercice 15. (Connexité par arc)
Un espace topologique X est *connexe par arcs* si pour tous $x, y \in X$, il existe un *chemin* reliant x à y, c'est-à-dire une application continue $\gamma\colon [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$. Une partie C d'un espace topologique est *connexe par arcs* si C munie de la topologie induite est un espace topologique connexe par arcs.

a. Montrer qu'un espace topologique connexe par arcs est connexe.
b. Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.
c. Montrer que le produit de deux espaces topologiques connexes par arcs est connexe par arcs.

Exercice 16.
a. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe.
[*Indication :* pour $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, considérer l'application $t \mapsto \det(tA + (1-t)B)$ et ses zéros.]
b. L'espace $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est-il connexe ?

Exercice 17. (Connexité par arcs dans un evn)
Soit $E = (E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel.

a. Une partie A de E est *convexe* si pour tous $x, y \in A$, le *segment* $[x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\}$ est contenu dans A. Montrer qu'une partie convexe de E est connexe par arcs (donc connexe).
b. Montrer que si $\dim(E) \geq 2$ et F est une partie finie de E, alors les sous-espace $E \smallsetminus F$ est connexe par arcs (donc connexe).
c. Si par contre $\dim(E) = 1$ et $x \in E$, alors $E \smallsetminus \{x\}$ est non-connexe (donc non-connexe par arcs).

Exercice 18.
Montrer que l'adhérence de $\{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\} \subset \mathbb{R}^2$ est connexe mais n'est pas connexe par arcs.

Exercice 19.
L'intervalle $[0,1]$ et le carré $[0,1] \times [0,1]$ sont-ils homéomorphes ?

Exercice 20. (Composantes connexes et composantes connexes par arcs)
Soit X un espace topologique. Les *composantes connexes* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \sim y$ s'il existe une partie connexe de X contenant x et y. Les *composantes connexes par arcs* de X sont les classes d'équivalences de la relation d'équivalence sur X définie par $x \approx y$ s'il existe un chemin de x vers y (voir le cours).

a. Montrer que les composantes connexes de X sont des parties fermées connexes disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe non vide de X est contenue dans une unique composante connexe.
b. Montrer que les composantes connexes par arcs de X sont des parties connexes par arcs disjointes dont l'union est X, et que toute partie connexe par arcs non vide de X est contenue dans une unique composante connexe par arcs.
c. Montrer que toute composante connexe par arcs de X est contenue dans une unique composante connexe de X.

d. Montrer que si X est *localement connexe par arcs* (i.e., si tout voisinage de tout point x contient un voisinage de x connexe par arcs), alors les composantes connexes par arcs de X sont les composantes connexes de X.

e. En déduire que toute partie connexe ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie est connexe par arcs.

Exercice 21.

Montrer que si un espace topologique X est une union disjointe d'ouverts connexes, alors les composantes connexes de X sont ces ouverts connexes.