TD2 - Espaces quotients et variétés

Exercice 1. (Cônes d'espaces topologiques)
Le *cône* d'un espace topologique X est l'espace quotient $C(X) = (X \times [0,1])/(X \times \{0\})$.
Montrer que $C(S^{n-1}) \cong D^n$.

Exercice 2. (La droite de Hausdorff)
Soit $D = ((\mathbb{R} \times \{1\}) \cup (\mathbb{R} \times \{2\}))/\sim$ l'espace quotient obtenu en recollant deux droites euclidiennes le long des identifications $(r, 1) \sim (r, 2)$ pour tout $r \neq 0$.
a. Montrer que tout point de D admet un voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}$.
b. Montrer que D n'est pas séparé (et donc n'est pas une variété topologique).

Exercice 3. (Un quotient sauvage)
On considère l'action de $\mathbb{Q}$ sur $\mathbb{R}$ par translation.
a. Montrer que chaque point de $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ est contenu dans chaque voisinage ouvert de chaque autre point.
b. En déduire que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ n'est pas séparé.

Exercice 4. (Une action non propre)
Démontrer que l'action du groupe $\mathbb{Z}$ sur l'espace $\mathbb{R}$ définie par $n \cdot x = 2^n x$ n'est pas propre.

Exercice 5. (La sphère de dimension 3 comme union de tores pleins)
Montrer que la sphère S^3 est obtenue en recollant les tores pleins $S^1 \times B^2$ et $B^2 \times S^1$ le long de leur bord commun $S^1 \times S^1$.
[*Indication :* montrer que $A = \{(x, y, z, t) \in S^3 \,|\, x^2 + y^2 \geq 1/2\}$ et $B = \{(x, y, z, t) \in S^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1/2\}$ sont homéomorphes à des tores pleins.]

Exercice 6. (Propriété universelle du recollement)
Soient X, Y des espaces topologiques, A une partie de Y et $f : A \to X$ une application continue. On rappelle que le *recollement de Y à X le long de f* est l'espace topologique quotient

$$X \cup_f Y = (X \amalg Y)/\mathcal{R}$$

où $\mathcal{R}$ est la relation d'équivalence sur $X \amalg Y$ engendrée par $f(a)\mathcal{R}a$ pour $a \in A$.
Un carré

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\beta"] \\ X \arrow[r, "\alpha"'] & Z \end{tikzcd} \qquad (*)$$

où Z est un espace topologique, α, β sont des applications continues et $j : A \hookrightarrow Y$ est l'inclusion, est dit *cocartésien* s'il est commutatif (c'est-à-dire, $\alpha f = \beta j$) et si pour toutes applications continues $h : X \to W$ et $l : Y \to W$, où W est une espace topologique, vérifiant $hf = lj$, il existe une unique application continue $\psi : Z \to W$ telle que $h = \psi\alpha$ et $l = \psi\beta$.

a. Notons par γ (respectivement, δ) la composition de l'inclusion canonique $X \hookrightarrow X \amalg Y$ (respectivement, $Y \hookrightarrow X \amalg Y$) avec la projection canonique $X \amalg Y \twoheadrightarrow X \cup_f Y$. Montrer que le carré suivant est cocartésien :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\delta"] \\ X \arrow[r, "\gamma"'] & X \cup_f Y \end{tikzcd}$$

b. En déduire que si un carré $(*)$ comme ci-dessus est cocartésien, alors $Z \cong X \cup_f Y$.

Exercice 7. (Décomposition celllulaire des espaces projectifs)
Soient $\mathbb{K}$ un corps et $n \geq 0$. L'*espace projectif sur* $\mathbb{K}$ *dimension* n est le quotient

$$\mathbf{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\})/\mathbb{K}^*$$

où $\mathbb{K}^*$ agit par multiplication scalaire. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on munit $\mathbf{P}^n(\mathbb{K})$ de la topologie quotient.

a. Montrer que $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ sont des variétés topologiques compactes telles que

$$\mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^n/\mathbb{Z}_2 \quad \text{et} \quad \mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \cong S^{2n+1}/S^1.$$

b. Utiliser les projections canoniques $p_n \colon S^n \to \mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ et $q_n \colon S^{2n+1} \to \mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ de la question **a** et les inclusions $S^m \hookrightarrow B^{m+1}$ pour construire des carrés cocartésiens :

$$\begin{tikzcd} S^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_n"'] & B^{n+1} \arrow[d] \\ \mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \arrow[r] & \mathbf{P}^{n+1}(\mathbb{R}) \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} S^{2n+1} \arrow[r, hook] \arrow[d, "q_n"'] & B^{2n+2} \arrow[d] \\ \mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathbf{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \end{tikzcd}.$$

c. En déduire que $\mathbf{P}^{n+1}(\mathbb{R}) \cong \mathbf{P}^n(\mathbb{R}) \cup_{p_n} B^{n+1}$ et $\mathbf{P}^{n+1}(\mathbb{C}) \cong \mathbf{P}^n(\mathbb{C}) \cup_{q_n} B^{2n+2}$.

d. Déterminer une décomposition cellulaire de $\mathbf{P}^n(\mathbb{R})$ et $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$.

Exercice 8. (Exponentielle d'espaces topologiques)
Etant donnés des espaces topologiques X et Y, on note par $C(X, Y)$ l'ensemble des applications continues de X vers Y, et par Y^X l'espace topologique d'ensemble sous-jacent $C(X, Y)$ et muni de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K, U) = \{f \in C(X, Y) \,\big|\, f(K) \subset U\}$$

où K est un compact de X et U un ouvert de Y.
Soient X, Y, Z des espaces topologiques. On considère l'application

$$\Phi \colon C(Z \times X, Y) \to C(Z, Y^X)$$

définie par $\Phi(f)(z) = f_z \in Y^X$ pour tous $f \in C(Z \times X, Y)$ et $z \in Z$, où $f_z(x) = f(z, x)$ pour tout $x \in X$.

a. Montrer que l'application Φ est bien définie et injective.

b. Montrer que si X est localement compact (i.e., X est séparé et tout point de X admet un voisinage compact) alors l'application Φ est bijective.
[*Indication :* montrer que dans un espace topologique localement compact, tout voisinage d'un point contient un voisinage compact du point.]

Exercice 9. (Actions de groupes topologiques)
Soient G un groupe topologique et X un espace topologique. Soit Homeo(X) l'ensemble des homéomorphismes de X vers X muni de la topologie compacte-ouverte (voir l'exercice précédent).

a. Montrer que toute action continue de G sur X induit un morphisme de groupes continu de G vers Homeo(X).

b. Montrer que si X est localement compact, alors tout morphisme de groupes continu $\varphi \colon G \to \mathrm{Homeo}(X)$ définit une unique action continue de G sur X telle que φ soit le morphisme de groupes induit.