2022/23 - Master 1 - Topologie algébrique

TD3 - Homotopie

Exercice 1. (Inverses homotopiques)
Montrer qu'une équivalence homotopique peut admettre plusieurs inverses homotopiques.

Exercice 2. (Espace des configurations)
L'*espace des configurations de 2 points dans* $\mathbb{C}$ est le sous-espace topologique de $\mathbb{C}^2$ défini par

$$F_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \,|\, z_1 \neq z_2\}.$$

Montrer que F_2 a le même type d'homotopie que $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$.
[*Indication :* montrer que les applications $\psi\colon S^1 \to F_2$ et $\phi\colon F_2 \to S^1$, définies par $\psi(z) = (z, 0)$ et $\phi(z_1, z_2) = (z_1 - z_2)/|z_1 - z_2|$, sont des équivalences d'homotopie inverses l'une de l'autre en explicitant des homotopies $\phi\psi \simeq \mathrm{id}_{S^1}$ et $\psi\phi \simeq \mathrm{id}_{F_2}$.]

Exercice 3. (Type d'homotopie)
Montrer que les espaces topologiques suivants ont même type d'homotopie.
a. Un espace topologique X et le produit $X \times [0, 1]$.
b. Le cercle S^1 et le complémentaire d'un cercle dans S^3.
c. Le groupe orthogonal $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
[*Indication :* voir l'orthogonalisation de Gram-Schmidt comme une rétraction par déformation.]

Exercice 4. (Contractilité des cônes)
Montrer que le cône $C(X) = X \times [0, 1]/X \times \{0\}$ d'un espace topologique non vide X est contractile.

Exercice 5. (Prolongement d'applications)
Soient X et Y des espaces topologiques non vides. On identifie X avec la base du cône $C(X)$, c'est-à-dire avec l'image de $X \times \{1\}$ par la projection canonique $X \times [0, 1] \to C(X)$.
a. Montrer qu'une application continue $f\colon X \to Y$ se prolonge en une application continue $C(X) \to Y$ si et seulement si f est homotope à une application constante.
b. En déduire qu'une application continue $S^n \to Y$ se prolonge en une application continue $B^{n+1} \to Y$ si et seulement si elle est homotope à une application constante.

Exercice 6. (Sous-espaces des espaces contractiles)
Montrer que tout espace topologique est homéomorphe à un sous-espace d'un espace contractile.

Exercice 7. (Type d'homotopie et π_0)
L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique X se note $\pi_0(X)$.
a. Montrer que π_0 est *fonctoriel* pour les applications continues :
- Toute application continue $f\colon X \to Y$ induit une application $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ définie par $\pi_0(f)([x]) = [f(x)]$, où $[x]$ désigne la composante d'un point x.
- $\pi_0(g \circ f) = \pi_0(g) \circ \pi_0(f)$ pour toutes applications continues composables $f\colon X \to Y$ et $g\colon Y \to Z$.
- $\pi_0(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\pi_0(X)}$ pour tout espace topologique X.

b. Montrer que π_0 est *invariant par homotopie*: $\pi_0(f) = \pi_0(g)$ lorsque f est homotope à g.
c. Montrer que toute équivalence d'homotopie $f\colon X \to Y$ induit une bijection $\pi_0(f)\colon \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$.