2022/23 - Master 1 - Topologie algébrique

TD4 - Groupe fondamental

Exercice 1. (Groupes fondamentaux des tores et cylindres)
Déterminer le groupe fondamental du tore $S^1 \times S^1$, du tore solide $B^2 \times S^1$, du cylindre $S^1 \times [0,1]$, du cylindre infini $S^1 \times \mathbb{R}$.

Exercice 2. (Rétracts et groupe fondamental)
Soient A un rétract d'un espace topologique X et $a \in A$.
On choisit une rétraction $r\colon X \to A$ de l'inclusion $i\colon A \hookrightarrow X$.

a. Montrer que les morphismes de groupes $i_*\colon \pi_1(A,a) \to \pi_1(X,a)$ et $r_*\colon \pi_1(X,a) \to \pi_1(A,a)$ induits par i et r sont respectivement injectif et surjectif.

b. Montrer que si $i_*(\pi_1(A,a))$ est distingué dans $\pi_1(X,a)$, alors $\pi_1(X,a) \cong \pi_1(A,a) \times \mathrm{Ker}(r_*)$.
[*Indication :* remarquer que si $p\colon G \to H$ et $q\colon H \to G$ sont des morphismes de groupes tels que $q(H)$ soit distingué dans G et $pq = \mathrm{id}_H$, alors l'application $H \times \mathrm{Ker}(p) \to G$, $(h,g) \mapsto q(h)g$, est un isomorphisme de groupes.]

Exercice 3. (Composante connexe et groupe fondamental)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Notons C la composante connexe par arcs de x_0.
Montrer que l'inclusion $C \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(C,x_0) \to \pi_1(X,x_0)$.

Exercice 4. (Groupe fondamental des groupes topologiques)

a. *Principe d'Eckmann-Hilton.*
Soit M un ensemble muni de deux produits, i.e., deux applications $*\colon M\times M \to M$ et $\circ\colon M\times M \to M$, admettant une unité commune et vérifiant pour tous $a,b,c,d \in M$,

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d).$$

Montrez que les produits $*$ et $\circ$ sont égaux et que $* = \circ$ est associatif et commutatif.

b. Montrez que le groupe fondamental $\pi_1(G,1)$ d'un groupe topologique G est commutatif.

Exercice 5. (Commutativité du groupe fondamental)
Soit X un espace topologique non vide connexe par arcs. On rappelle que tout chemin (dans X) d'un point $x \in X$ à un point $y \in X$ induit un isomorphisme de groupes $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

a. Le groupe fondamental $\pi_1(X,x)$ est commutatif pour un (et donc tout) $x \in X$;

b. Pour tous $x,y \in X$, les chemins de x à y définissent le même isomorphisme $\pi_1(X,x) \to \pi_1(X,y)$.

Exercice 6. (Groupe fondamental et espace des lacets)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. On rappelle qu'un lacet de X basé en x_0 est une application continue $\alpha\colon [0,1] \to X$ telle que $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$. On munit l'ensemble $\Omega(X,x_0)$ des lacets de X basés en x_0 de la topologie dite *compacte-ouverte*, c'est-à-dire engendrée par les ensembles

$$W(K,U) = \{\alpha \in \Omega(X,x_0) \,|\, \alpha(K) \subset U\}$$

où K est un compact de $[0,1]$ et U est un ouvert de X. L'ensemble des composantes connexes par arcs d'un espace topologique Y se note $\pi_0(Y)$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(X,x_0) = \pi_0(\Omega(X,x_0)).$$

a. Montrer que deux lacets α,β de X basés en x_0 sont homotopes (à extrémités fixes) si et seulement s'il existe un chemin (continu) dans $\Omega(X,x_0)$ reliant α à β.
[*Indication :* relier une homtopie H de α à β et un chemin Γ dans $\Omega(X,x_0)$ de α à β par $\Gamma(t) = H(\cdot,t)$.]

b. Conclure.

Exercice 7. (Groupes par générateurs et relations)
a. Déterminer tous les isomorphismes entre $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $\langle g \mid g^n \rangle$, où $n \in \mathbb{N}$.
b. Reconnaître le groupe

$$\langle a, b, c, d, e \mid d = e^2,\ bda = 1,\ ab^{-1}c = 1,\ bc = a,\ de = c \rangle.$$

c. Montrer que les groupes suivants sont isomorphes

$$\langle a, b \mid b^{-1}aba \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, y \mid x^2y^2 \rangle.$$

c. Montrer que les groupes suivants ne sont pas isomorphes

$$\langle a, b \mid ba^2b^3 = a,\ abab^2 = 1 \rangle \quad \text{et} \quad \langle x, y \mid y^3xy = x,\ x^5y = y^3x^2 \rangle.$$

Exercice 8. (Somme amalgamée triviale)
Montrer que la somme amalgamée $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}) *_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ au dessus de $\mathbb{Z}$ le long des surjections canoniques $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est le groupe trivial.

Exercice 9. (Sommes amalgamées faciles)
Soient $\psi_1 \colon K \to G_1$ et $\psi_2 \colon K \to G_2$ deux morphismes de groupes de même source K.
Donner une description plus simple de la somme amalgamée $G_1 *_K G_2$ dans les cas spéciaux suivants :
a. Lorsque le groupe G_1 est trivial.
b. Lorsque le morphisme ψ_1 est trivial.
c. Lorsque le morphisme ψ_1 est un isomorphisme.

Exercice 10. (Somme amalgamée de deux présentations)
Soient $G_1 = \langle \mathcal{G}_1 \mid \mathcal{R}_1 \rangle$ et $G_2 = \langle \mathcal{G}_2 \mid \mathcal{R}_2 \rangle$ deux groupes présentés par générateurs et relations. Soit $K = \langle \mathcal{K} \mid \mathcal{S} \rangle$ un autre tel groupe, et soient $\psi_i \colon K \to G_i$ deux morphismes ($i = 1, 2$).
a. Trouver une présentation du produit libre $G_1 * G_2$.
b. Trouver une présentation de la somme amalgamée $G_1 *_K G_2$.

Exercice 11. (Groupe fondamental de la bouteille de Klein)
Déterminer le groupe fondamental de la *bouteille de Klein* définie par

$$\mathcal{K} = [0, 1]^2 / \sim$$

où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par $(x, 0) \sim (x, 1)$ et $(0, y) \sim (1, 1 - y)$ pour $x, y \in [0, 1]$.
[*Indication* : Déterminer une présentation du groupe fondamental de $\mathcal{K}$ à l'aide du théorème de van Kampen, pour un recouvrement ouvert $\mathcal{K} = U_1 \cup U_2$ tel que U_1 est contractile et U_2 se rétracte sur l'image dans $\mathcal{K}$ du périmètre $\{(x, y) \in [0, 1]^2 \mid x \in \{0, 1\} \text{ ou } y \in \{0, 1\}\}$.]

Exercice 12. (Espaces correctement pointés)
Soient X un espace topologique et $x_0 \in X$. Ont dit que X est *correctement pointé en* x_0 s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que l'identité $\mathrm{id}_U \colon U \to U$ et l'application $c_{x_0} \colon U \to U$ constante égale à x_0 soient homotopes relativement à $\{x_0\}$. En particulier, $\{x_0\}$ est un rétract par déformation de U.
Montrer qu'un espace cellulaire X est correctement pointé en tout $x_0 \in X$.

Exercice 13. (Groupe fondamental d'un bouquet)
Soient X et Y des espace topologiques correctement pointés en $x_0 \in X$ et $y_0 \in Y$, respectivement. Notons $X \vee Y$ le bouquet de X et Y (obtenu de $X \amalg Y$ en identifiant x_0 et y_0) et z_0 le point de $X \vee Y$ représentant x_0 et y_0. Montrer que

$$\pi_1(X \vee Y, z_0) \cong \pi_1(X, x_0) * \pi_1(Y, y_0).$$

Exercice 14. (Attachement d'une cellule)
Soient X un espace topologique connexe par arcs et $f\colon S^{n-1} \to X$ une application continue. Notons

$$Y = X \cup_f B^n$$

l'espace topologique obtenu en attachant à X une cellule B^n de dimension n le long de f. Soit $s_0 \in S^{n-1}$, $x_0 = f(s_0) \in X$ et $y_0 = \overline{x_0} \in Y$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\pi_1(Y, y_0) \cong \begin{cases} \pi_1(X, x_0) * \mathbb{Z} & \text{si } n = 1 \text{ et } X \text{ est correctement pointé en } x_0, \\ \pi_1(X, x_0)/N_f & \text{si } n = 2, \\ \pi_1(X, x_0) & \text{si } n \geq 3, \end{cases}$$

où, dans le cas $n = 2$, le groupe N_f est le plus petit sous-groupe distingué de $\pi_1(X, x_0)$ contenant la classe d'homotopie du lacet de X défini par $t \in [0, 1] \mapsto f(e^{2i\pi t})$.

a. Supposons $n = 1$. Montrer que $f\colon S^0 \to X$ est homotope à l'application constante égale à x_0. En déduire que Y à le même type d'homotopie que le bouquet $X \vee S^1$ obtenu en identifiant x_0 et $1 \in S^1$. Conclure en utilisant l'exercice 13.

b. Supposons désormais $n \geq 2$. Soient 0 le centre de la boule B^n et $p\colon B^n \amalg X \to Y$ l'application quotient. On pose :

$$U = p((B^n \setminus \{0\}) \amalg X) \quad \text{et} \quad V = p(B^n \setminus S^{n-1}).$$

Montrer que U, V, et $U \cap V$ sont des ouverts de Y connexes par arcs.

c. Montrer que V est simplement connexe.

d. Montrer que $U \cap V$ est un rétract par déformation de $p(S^{n-1}_{1/2})$, où $S^{n-1}_{1/2} \subset B^n$ est la sphère de centre 0 et de rayon $1/2$.

e. Montrer que $p(X)$ est un rétract par déformation de U via une rétraction $r\colon U \to p(X)$ telle que $rp(x/2) = pf(x)$ pour tout $x \in S^{n-1}$.

f. En déduire qu'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \pi_1(S^{n-1}, s_0) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(U \cap V, p(s_0/2)) \arrow[d, "j_*"] \\ \pi_1(X, x_0) & \pi_1(U, p(s_0/2)). \arrow[l, "\cong"'] \end{tikzcd}$$

où les flèches horizontales sont des isomorphismes de groupes et $j\colon U \cap V \hookrightarrow U$ est l'inclusion.

f. Conclure.

Exercice 15. (Groupes fondamentaux des espaces projectifs)
Montrer que les espaces projectifs complexes $\mathbf{P}^n(\mathbb{C})$ sont simplement connexes:

$$\pi_1(\mathbf{P}^n(\mathbb{C})) \cong 1 \quad \text{pour } n \geq 1,$$

et que les groupes fondamentaux des espaces projectifs réels sont

$$\pi_1(\mathbf{P}^1(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \pi_1(\mathbf{P}^n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \quad \text{pour } n \geq 2.$$

[*Indication :* utiliser l'exercice 7.c du TD2.]

Exercice 16. (Groupes de présentation finie comme groupes fondamentaux)
Montrer que tout groupe de présentation finie est le groupe fondamental d'un espace topologique.
[*Indication :* si $G \cong \langle g_1, \ldots, g_m \,|\, r_1, \ldots, r_n \rangle$, attacher n cellules B^2 au bouquet de m cercles.]