2022/23 - Master 1 - Topologie algébrique

TD5 - Revêtements

Exercice 1. (Existence de relèvement)
Soit $f\colon \mathbb{RP}^2 \to S^1$ une application continue. Montrer qu'il existe une application continue $g\colon \mathbb{RP}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{ig(x)}$ pour tout $x \in \mathbb{RP}^2$.

Exercice 2. (Revêtements universels)
Expliciter des revêtements universels pour la sphère S^n, l'espace projectif réel $\mathbb{RP}^n$, le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$.

Exercice 3. (Homéomorphismes locaux et revêtements)
Une application continue $f\colon X \to Y$ est un *homéomorphisme local* si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert est une U de x tel que $f(U)$ soit ouvert et $f_{|U}^{|f(U)}\colon U \to f(U)$ soit un homéomorphisme.

a. Montrer qu'un revêtement est un homéomorphisme local.
b. Montrer qu'un homéomorphisme local est une application ouverte.
c. Soit $p\colon E \to B$ un homéomorphisme local avec E séparé. On suppose que les fibres $p^{-1}(b)$, avec $b \in B$, sont finies et ont le même cardinal. Montrer que p est un revêtement.
d. Montrer que l'application $f\colon]0,2[\to S^1$, définie par $f(t) = e^{2i\pi t}$, est un homéomorphisme local dont les fibres sont finies, mais que f n'est pas un revêtement.

Exercice 4. (Puissance n-ième)
Soit $n \geq 1$. Montrer que l'application $p_n\colon \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, définie par $z \mapsto z^n$, est un revêtement à n feuillets.

Exercice 5. (Construction du revêtement universel)
Soient B un espace topologique et $b_0 \in B$. Notons par C l'ensemble des chemins dans B d'origine b_0, par $\widetilde{B}$ le quotient de C par la relation d'homotopie à extrémités fixes, et par $[\alpha]$ la classe d'homotopie à extrémités fixes d'un chemin α dans B. L'evaluation d'un chemin en 1 définit une application

$$\widetilde{p}\colon \widetilde{B} \to B.$$

Le but de l'exercice est de montrer que si B est connexe par arcs, localement connexe par arcs et semi-localement simplement connexe (i.e., tout point $b \in B$ admet un voisinage ouvert U tel que tout lacet de U basé en b soit homotope dans B au lacet trivial), alors on peut munir $\widetilde{B}$ d'une topologie telle que l'application $\widetilde{p}\colon \widetilde{B} \to B$ soit un revêtement universel de B.

a. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des paires (U, α) où U est ouvert de B connexe par arcs et $\alpha \in C$ tels que $\alpha(1) \in U$. Pour $(U, \alpha) \in \mathcal{P}$, on définit

$$\Omega(U, \alpha) = \{[\alpha\beta] \mid \beta \text{ chemin dans } U \text{ d'origine } \alpha(1)\}.$$

Montrez que l'ensemble $\{\Omega(U, \alpha)\}_{(U,\alpha)\in\mathcal{P}}$ est une base pour une topologie sur $\widetilde{B}$. Dans la suite, on munit $\widetilde{B}$ de la topologie définie par cette base. Montrez que $\widetilde{p}\colon \widetilde{B} \to B$ est continue.
b. Soient $b \in B$ et U un voisinage ouvert connexe par arcs de b tel que le morphisme $\pi_1(U, b) \to \pi_1(B, b)$ induit par l'inclusion soit trivial. Montrer que U est trivialisant pour $\widetilde{p}$. En déduire que $\widetilde{p}$ est un revêtement.
c. Soit $\alpha \in C$. Montrer que l'application $\widetilde{\alpha}\colon [0,1] \to \widetilde{B}$, définie par $\widetilde{\alpha}(s) = [\alpha_s]$ où $\alpha_s(t) = \alpha(ts)$, est un relèvement de α d'origine $[c_0]$ et d'extrémité $[\alpha]$, où c_0 est le chemin de B constant égal à b_0.
d. Montrer que $(\widetilde{p})_*(\pi_1(\widetilde{B}, [c_0]))$ est trivial. En déduire que $\widetilde{B}$ est simplement connexe.