2014/15 - Master 2 - TQFT

TD1 - Catégories monoïdales

Exercice 1.
Démontrer le lemme de Yoneda.

Exercice 2.
Soit $\Bbbk$ un corps. Montrer que $\Bbbk[X] \otimes_{\Bbbk} \Bbbk[Y] \simeq \Bbbk[X, Y]$.

Exercice 3. (Propriétés de l'unité monoïdale)
Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ une catégorie monoïdale.
a. Montrer que pour tous $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

$$l_{X \otimes Y} = (l_X \otimes \mathrm{id}_Y)\, a^{-1}_{\mathbb{1},X,Y} \quad \text{et} \quad r_{X \otimes Y} = (\mathrm{id}_X \otimes r_Y)\, a_{X,Y,\mathbb{1}}.$$

Indication : on pourra étudier la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
((\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \otimes X) \otimes Y \arrow[rr, "a_{\mathbb{1},\mathbb{1},X} \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[dr, "(r_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{id}_X) \otimes \mathrm{id}_Y"'] \arrow[ddd, "a_{\mathbb{1}\otimes\mathbb{1},X,Y}"'] & & (\mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} \otimes X)) \otimes Y \arrow[dl, "(\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes l_X) \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[ddd, "a_{\mathbb{1},\mathbb{1}\otimes X,Y}"] \\
& (\mathbb{1} \otimes X) \otimes Y \arrow[d, "a_{\mathbb{1},X,Y}"] & \\
& \mathbb{1} \otimes (X \otimes Y) & \\
(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \otimes (X \otimes Y) \arrow[ur, "r_{\mathbb{1}} \otimes \mathrm{id}_{X \otimes Y}"] \arrow[dr, "a_{\mathbb{1},\mathbb{1},X\otimes Y}"'] & & \mathbb{1} \otimes ((\mathbb{1} \otimes X) \otimes Y) \arrow[ul, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes (l_X \otimes \mathrm{id}_Y)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes a_{\mathbb{1},X,Y}"] \\
& \mathbb{1} \otimes (\mathbb{1} \otimes (X \otimes Y)) \arrow[uu, "\mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes l_{X \otimes Y}"] &
\end{tikzcd}$$

b. Montrer que pour tout $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$,

$$l_{\mathbb{1} \otimes X} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}} \otimes l_X \quad \text{et} \quad r_{X \otimes \mathbb{1}} = r_X \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{1}}.$$

c. Montrer que $l_{\mathbb{1}} = r_{\mathbb{1}}$.
d. Montrer que pour tous $f, g \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1})$,

$$gf = l_{\mathbb{1}}(g \otimes f) l_{\mathbb{1}}^{-1}.$$

e. En déduire que $(\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}), \circ, \mathrm{id}_{\mathbb{1}})$ est un monoïde commutatif.

Exercice 4. (Unicité de l'unité monoïdale)
Soient $\mathcal{C}$ une catégorie, $\otimes \colon \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un foncteur et

$$a = \{a_{X,Y,Z} \colon X \otimes (Y \otimes Z) \to X \otimes (Y \otimes Z)\}_{X,Y,Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

un isomorphisme naturel vérifiant l'axiome du pentagone.
Montrer qu'un triplet $(\mathbb{1}, l, r)$, où $\mathbb{1} \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et

$$l = \{l_X \colon \mathbb{1} \otimes X \to X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \quad \text{et} \quad r = \{r_X \colon X \otimes \mathbb{1} \to X\}_{X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})}$$

sont des isomorphismes naturels, tel que $(\mathcal{C}, \otimes, \mathbb{1}, a, l, r)$ soit une catégorie monoïdale est unique à unique isomorphisme près compatible aux contraintes d'unité.

Exercice 5. (Les catégories monoïdales G_A^α)
Soient G un monoïde (par exemple un groupe), A un groupe commutatif, et α un 3-cocyle de G à valeurs dans A, c'est-à-dire une application $\alpha\colon G \times G \times G \to A$ telle que pour tous $g, h, k, l \in G$,

$$\alpha(gh, k, l)\,\alpha(g, h, kl) = \alpha(g, h, k)\,\alpha(g, hk, l)\,\alpha(h, k, l).$$

Soit G_A^α la catégorie monoïdale définie comme suit :

$$\mathrm{Ob}(G_A) = G, \qquad \mathrm{Hom}_{G_A^\alpha}(g, h) = \emptyset \quad \text{si } g \neq h, \qquad \mathrm{Hom}_{G_A^\alpha}(g, g) = A,$$

la composition est donné par le produit de A, les identités sont $\mathrm{id}_g = 1_A$, le produit monoïdal d'objets est défini par $g \otimes h = gh$, le produit monoïdal de morphismes est défini par $\phi \otimes \varphi = \phi\varphi$, l'unité monoïdale est 1_G, les contraintes monoïdales sont définies par

$$a_{g,h,l} = \alpha(g, h, l), \qquad l_g = \alpha(1, 1, g)^{-1}, \qquad r_g = \alpha(g, 1, 1).$$

Vérifier que G_A^α est bien une catégorie monoïdale.

Exercice 6. (Foncteurs monoïdaux entre les catégories G_A^α)
Soient G, H deux monoïdes, A, B des groupes commutatifs, α un 3-cocyle de G à valeurs dans A, et β un 3-cocyle de H à valeurs dans A. On considère les catégories monoïdales G_A^α et H_B^β de l'exercice précédent.

a. Déterminer les foncteurs monoïdaux de G_A^α vers H_B^β.
Lesquels sont des equivalences monoïdales ?

b. Determiner les transformations naturelles monoïdales entre foncteurs monoïdaux $G_A^\alpha \to H_B^\beta$.
Montrer qu'une telle transformation naturelle est un isomorphisme.