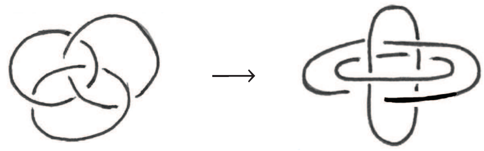
Université de Lille

Master 2 (2023) - Groupes quantiques et invariants quantiques

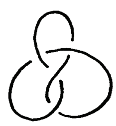
TD1 - Polynôme de Jones

Exercice 1.
Trouver une suite de mouvements de Reidemeister transformant le premier entrelacs en le second :



Exercice 2.
Soit L un entrelacs orienté. Notons $-L$ l'entrelacs obtenu en renversant l'orientation de chaque composante de L. Montrer que $V_{-L}(t) = V_L(t)$. En particulier, le polynôme de Jones d'un noeud ne dépend pas de l'orientation du noeud.

Exercice 3.
Calculer le polynôme de Jones du noeud de huit ci-dessous de deux façons : avec la relation d'écheveau puis par somme d'états.



Exercice 4.
Montrer que le nombre de composantes d'un entrelacs orienté L est

$$n_L = 1 + \log_2(|V_L(1)|).$$

Exercice 5.
Soit L un entrelacs orienté. L'*image miroir* de L est l'entrelacs orienté $\bar{L} = \rho(L)$ où $\rho(x, y, z) = (x, y, -z)$. (Un diagramme de $\bar{L}$ est obtenu d'un diagramme de L en changeant chaque croisement en son opposé tout en gardant l'orientation des composantes.) Montrer que

$$V_{\bar{L}}(t) = V_L(t^{-1}).$$

Exercice 6.
Montrer que les noeuds trèfles droite et gauche ne sont pas isotopes.

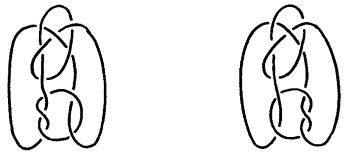
Exercice 7.
Soient L un entrelacs orienté et K une composant de L. Notons $L^* = (L \setminus K) \cup (-K)$ l'entrelacs obtenu de L en renversant l'orientation de K. Montrer que

$$V_{L^*}(t) = t^{-3\mathrm{lk}(K, L \setminus K)}\, V_L(t).$$

Exercice 8.
Soient L_1 et L_2 deux entrelacs orientés. Notons $L_1 \sqcup L_2$ leur union disjointe. Considérons la somme connexe $L_1 \# L_2$ obtenue en connectant une composante de L_1 avec une composante de L_2. Montrer que

$$V_{L_1 \sqcup L_2}(t) = (-t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})\, V_{L_1}(t)\, V_{L_2}(t) \quad \text{et} \quad V_{L_1 \# L_2}(t) = V_{L_1}(t)\, V_{L_2}(t).$$

Exercice 9.
Montrer que les noeuds suivants ont même polynôme de Jones mais ne sont pas isotopes.



On pourra montrer que les groupes de ces noeuds ne sont pas isomorphes.

Exercice 10.
Le polynôme HOMFLY d'un entrelacs orienté L un un polynôme de Laurent en deux variables $H_L(t,z)$ qui est invariant par isotopies, satisfait le relation d'écheveau

$$t^{-1}H_{L_+}(t,z) - t\,H_{L_-}(t,z) = z\,H_{L_0}(t,z)$$

et vaut $H_O(t,z) = 1$ pour le noeud trivial O. Verifier que le polynôme HOMFLY généralise le polynôme de Jones. Calculer le polynôme HOMFLY du trèfle et du noeud de huit.